

## UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN UN CURSO DE MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Costa, Viviana A.

UIDET IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, 49 y 115, Buenos Aires, Argentina. [vacosta@ing.unlp.edu.ar](mailto:vacosta@ing.unlp.edu.ar)

**Palabras Claves:** educación, matemática, didáctica, cálculo vectorial.

### Introducción

El Cálculo Vectorial es una rama de la matemática referida al análisis real de funciones de dos o más variables. Sus orígenes se encuentran ligados fuertemente con los inicios de la física-matemática, la termodinámica, la hidrodinámica, la mecánica de los fluidos, la electricidad y el magnetismo (fines del siglo XVIII y principios del siglo XIX). Sus conceptos centrales, tales como son el de *campo vectorial*, *campo escalar*, sus variaciones y las integrales que los involucran, son esenciales para alumnos de carreras de ingeniería, pues les proporciona herramientas básicas e indispensables para la modelización matemática de diversos fenómenos físicos, que podrán ser analizados a partir de una representación vectorial.

El estudio y comprensión de esos objetos matemáticos no es sencillo y requiere por parte del estudiante de un pensamiento matemático avanzado. Esta problemática ha sido abordada por diversos investigadores (Azcarate Giménez y Camacho Machín, 2003; Moreno, 2005; Salinas y Alanís, 2009; Dunn y Barbanel, 2000; Kümmerer, 2002; Camarera, 2009; Willcox y Bounova, 2004; Zuñiga, 2007). Mencionan que en general la enseñanza tradicional: mecanicista, descontextualizada y técnica, obstaculiza la comprensión de los significados de los objetos matemáticos de estudio y su vínculo con otras ciencias y proponen diversas estrategias de enseñanza.

Como propuesta alternativa a las existentes y radicalmente diferente, se diseñó, experimentó y evaluó una enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de ingeniería mediante el denominado *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard. Este *dispositivo didáctico* parte de una *pregunta generatriz* y organiza el proceso de estudio entorno a pares de preguntas y respuestas.

En este trabajo se presentan algunos resultados del REI experimentado en un curso habitual de matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata con alumnos de la carrera ingeniería aeronáutica. El REI fue iniciado con la *pregunta generatriz* *¿Cómo construir edificaciones sustentables?* El análisis completo a priori y a posteriori del REI utilizando los constructos de la TAD dio lugar a una tesis de doctorado en el campo de Enseñanza de las Ciencias que fue defendida en el mes de diciembre del año 2013.

### Marco teórico

La investigación se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard, que manifiesta que el problema en la enseñanza de la matemática actual es debido a que la epistemología escolar dominante elimina las "*razones de ser*" de las *organizaciones matemáticas* (OM) que se proponen estudiar en una institución. Este fenómeno lo relaciona con otro al que denomina *monumentalización del saber*, caracterizado por presentar a los objetos de estudio como *obras terminadas* (monumentos),

como objetos ya creados, que a lo sumo se puede *visitar*. Para enfrentar la *monumentalización de los saberes*, Chevallard propone pasar del *paradigma de visitar obras* al *paradigma de cuestionar el mundo* (Chevallard, 2007, 20012, 2013).

Para ello propone introducir en el aula el *dispositivo didáctico* que denomina *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI). Los REI pretenden introducir en el aula la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM) (Ladage, Chevallard, 2011). Esta nueva pedagogía, diferente a la habitual, intenta incorporar en los estudiantes y en la comunidad de estudio, el nuevo paradigma de “*cuestionar al mundo*” y el desarrollo de ciertas actitudes propias de la “*investigación*”.

El proceso de estudio durante un REI se organiza a partir de pares de preguntas ( $Q_i, i=1..n$ ) y respuestas ( $R_j$  para  $j=1..m$ ). Al inicio el profesor es el que propone una *pregunta generatriz* ( $Q_0$ ) que dispara el estudio e investigación. Los alumnos y el profesor asumirán actitudes y roles radicalmente diferente a los habituales en la enseñanza tradicional. Habrá un reparto de responsabilidades. Los alumnos trabajarán en grupos, serán los encargados de aportar *respuestas parciales*, discutirlos, validarlos, comunicarlos, proponer el estudio de ciertas *obras* ( $O_p, p=1..l$ ) que consideren necesario para elaborar “*respuestas parciales*” y formularán nuevas *preguntas derivadas* que consideren para arribar a una “*respuesta final*” (Otero, Fanaro, Córlica, Llanos, Sureda, Parra, 2013).

## Metodología

El REI se experimentó en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP, Argentina) en un curso habitual de Matemática B (MB) con 48 estudiantes de primer año (18 a 20 años) de la carrera ingeniería aeronáutica. Se llevó a cabo en 12 encuentros, de cuatro horas cada uno, ajustado según el *calendario académico* que rige en dicha institución y la reglamentación vigente para el dictado de los cursos de matemática básica.

Previo al inicio del REI se realizaron algunos acuerdos. Los estudiantes formarían grupos permanentes de trabajo y serían los responsables del proceso de estudio e investigación. Durante los encuentros se dedicarían algunos momentos al proceso de estudio y otros a puestas en común de los grupos de trabajo con el objetivo de defender y validar las respuestas. Al finalizar el REI se acordó además que cada grupo debía presentar en el campus virtual que dispone la FI UNLP en la plataforma Moodle un Informe Final del estudio realizado. También se acordó que los estudiantes podrían hacer uso de los siguientes *recursos didácticos*: Guías de estudio de la cátedra, libros, los docentes del equipo de trabajo, internet, software matemático, curso de MB en la plataforma virtual y dispositivos móviles de uso personal con acceso a internet.

Para el diseño metodológico de la investigación se adoptó el modelo *descriptivo* con el objeto de identificar las modificaciones que se produjeran en el *medio didáctico* al introducir la *pedagogía de la investigación y del descubrimiento del mundo*, mediante la implementación de un REI. Por esto el investigador (el mismo profesor del curso) recolectó y escaneó las producciones de cada grupo de modo sistemático. Además se registró la actividad en fotografías y videos, en particular las puestas en común.

A priori del desarrollo del REI se realizó un análisis que investigó sobre dos aspectos. Uno analizó los posibles recorridos que podrían ser desarrollados por alumnos de una facultad de ingeniería en un curso de matemática. El otro aspecto, analizó los condicionamientos que favorecerían o limitarían el desarrollo del REI y su viabilidad, considerando distintos niveles de una escala propuesta en la TAD: sociedad, escuela, pedagogía, didáctica y disciplina (Costa, Arlego, Otero, 2014).


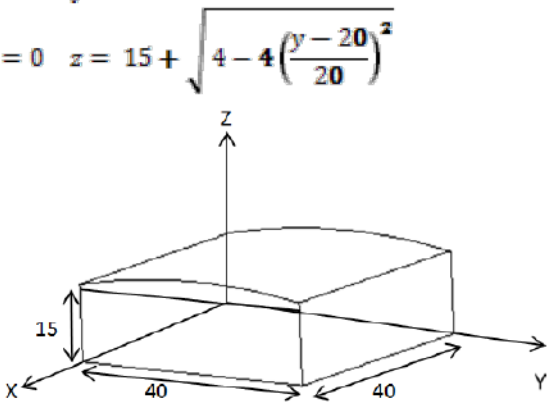


A posterior de la experimentación del REI, transformando los datos obtenidos se llevó a cabo un análisis que contempló varios aspectos utilizando los constructos de la TAD.

## Resultados

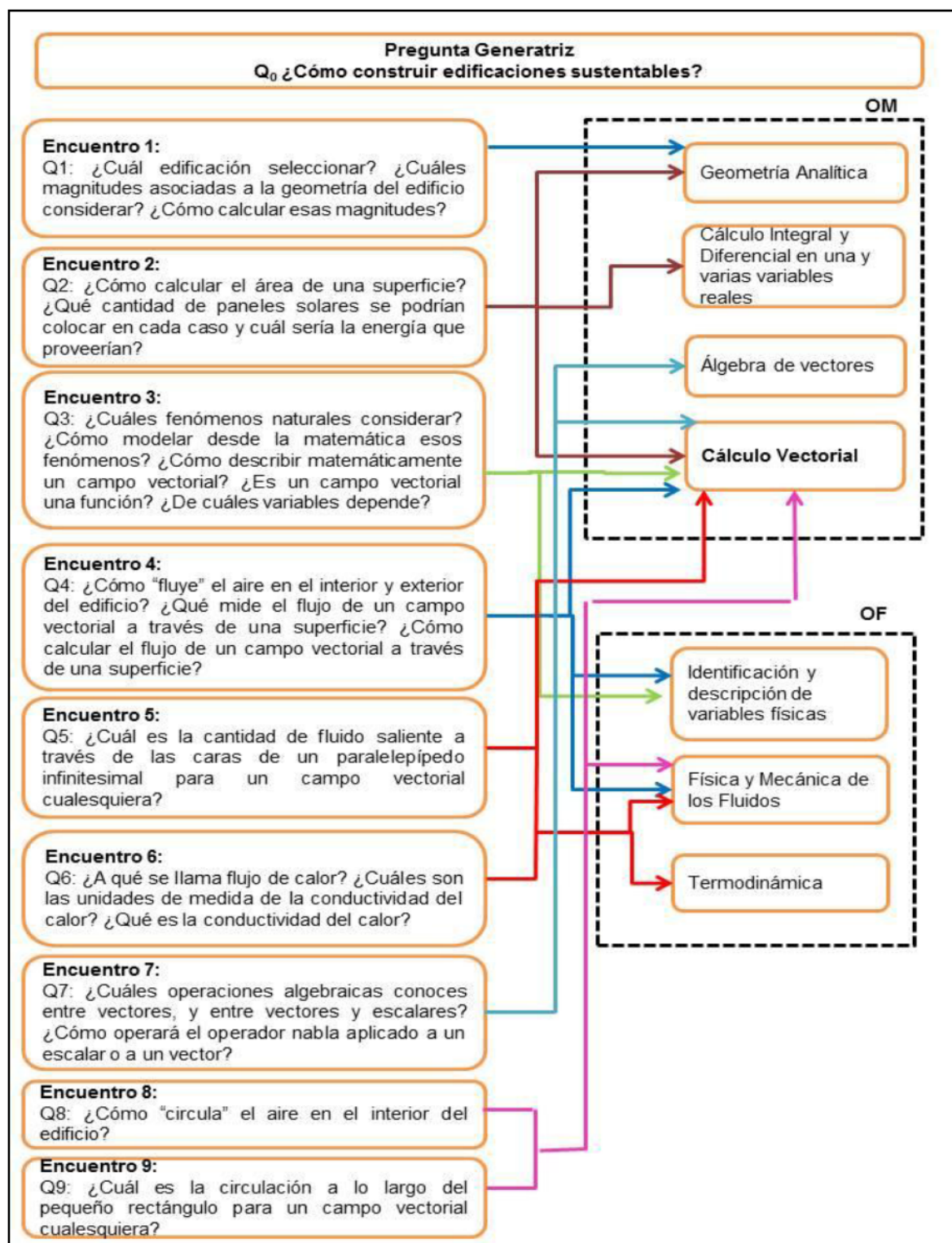
En lo que sigue en este trabajo exponemos algunos resultados del análisis a posteriori en relación al proceso de estudio realizado, las *preguntas* derivadas que surgieron y las *organizaciones matemáticas* (OM) y *organizaciones físicas* (OF) estudiadas para la búsqueda de *respuestas* (Cuadro 2).

La pregunta generatriz *¿Cómo construir edificaciones sustentables?* dio lugar en una primera etapa a la selección de un edificio. Todos los alumnos acordaron estudiar sobre la construcción de un hangar. Se propusieron diversos diseños y se los modeló matemáticamente, debiendo establecer magnitudes, unidades, un sistema de representación y ecuaciones matemáticas que mejor representen al edificio seleccionado. A modo ilustrativo mostramos en un cuadro el edificio seleccionado por uno de los grupos y su modelo matemático (Cuadro 1). Luego se acordó el estudio del cálculo de diversas magnitudes en relación al edificio que aportaran *respuestas parciales* a las preguntas  $Q_1$  y  $Q_2$ : *¿Cómo calcular el área de una superficie?* *¿Qué cantidad de paneles solares se podrían colocar en cada caso y cuál sería la energía que proveerían?* que permitieron el estudio de OM relativas al Cálculo Integral en varias variables.

Hangar	Modelo matemático
<p>Consideran un hangar "típico" para un tipo de avión modelo Airbus 320, con un largo de 37 metros, una envergadura de 34 metros y una altura de 13 metros</p> 	<p>Techo: cilindro elíptico. Base rectangular: 40x40 m<sup>2</sup> y altura de 15 m en los extremos. Ecuaciones matemáticas de las superficies que modelan el borde del edificio:  <math>x = 0 \quad x = 40</math>  <math>y = 0 \quad y = 40</math>  <math>z = 0 \quad z = 15 + \sqrt{4 - 4\left(\frac{y-20}{20}\right)^2}</math></p> 

Cuadro 1. Modelización matemática del edificio seleccionado por uno de los grupos.

Luego, surgieron preguntas asociadas al modelado de los *fenómenos naturales* que los estudiantes consideraron para el estudio de la *sustentabilidad*. Se decidió investigar sobre los siguientes aspectos: *"uso eficiente de los recursos naturales"*, *"relación costo-beneficio"*, *"uso de energías renovables"*, *"cuidado del medio ambiente"* y *"aprovechamiento de los fenómenos naturales"*, entre otros, dando lugar a las *preguntas derivadas*  $Q_i$ ,  $i=3..9$ . En particular se consideraron los fenómenos: viento, sol, lluvia, humedad y temperatura, modelándolos matemáticamente mediante *campos escalares* y *campos vectoriales*.



Cuadro 2. Preguntas derivadas propuestas durante cada encuentro. OM y OF estudiadas.

En la última etapa del REI a partir de preguntas del estilo: *¿Cómo “circula” o “fluye” el aire en el interior del edificio? ¿Cómo fluye el calor dentro del edificio?* surgieron las nociones de *circulación* y *flujo* y las preguntas derivadas relativas a su cálculo matemático. Además, la introducción de las nociones: *fuentes y sumideros de fluidos, flujo de fluidos, conservación de la masa, incompresibilidad y flujos rotacionales e irrotacionales de fluidos*, permitieron el estudio de aspectos básicos de las OF relativas a la Mecánica de los Fluidos y a la Termodinámica.

### Conclusiones



En este trabajo se presentó una propuesta alternativa para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de ingeniería abordada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El REI experimentado permitió introducir la *pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo* en un curso habitual de matemática en una facultad de ingeniería.

La *pregunta generatriz* disparó el estudio de un problema abierto y de interés en la ingeniería. Los alumnos tuvieron que buscar soluciones, recabar información, acotar el problema, definir modelos y decidir cuáles técnicas matemáticas utilizar; para finalmente proponer respuestas, defenderlas, modificarlas, discutirlos, comunicarlos y validarlos. Esto generó el estudio de conceptos centrales del Cálculo Integral y Vectorial, conjuntamente con aspectos básicos de la Física y Mecánica de los Fluidos, y de la Termodinámica, en una forma diferente a la tradicional incorporando gestos y actitudes propias de una nueva pedagogía, la PICM.

Una enseñanza por REI contribuiría en la formación de los estudiantes de ingeniería, en el desarrollo de competencias necesarias para la identificación y solución de problemas, ofreciendo muchas ventajas respecto de una enseñanza tradicional, donde en general el rol del alumno es pasivo, los problemas propuestos son cerrados e idealizados, y se evalúa lo que se enseña.

Sin embargo, aún persisten limitaciones y condicionamientos a cambios en la enseñanza tradicional predominantemente arraigados en la sociedad, en la que ni las instituciones, ni muchos de los profesores e incluso los estudiantes, están preparados para un cambio de la magnitud requerida.

## Bibliografía

AZCÁRATE GIMÉNEZ, C.; CAMACHO MACHÍN, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2, 135.

CAMARERA, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias, Innovación educativa, Vol 9, Nro 48, 15-25. Instituto Politécnico Nacional de México. (Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003#> , consulta Marzo 2011)

COSTA, V. A. (2013). Recorridos de Estudio e Investigación Codisciplinarios en la Universidad para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas.

COSTA, V. A.; ARLEGO, M.; OTERO, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. REFIEDU. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*. Vol. 7, N° 1, 20-40. [http://webs.uvigo.es/refiedu/Refiedu/Vol7\\_1/REFIEDU\\_7\\_1\\_3.pdf](http://webs.uvigo.es/refiedu/Refiedu/Vol7_1/REFIEDU_7_1_3.pdf)

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz- Higuera, A. Estepa y F. J. García (eds), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica (pp. 705-746). Universidad de Jaén. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id\\_rubrique=8](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8)

CHEVALLARD, Y. (2012). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. 12th International Congress on Mathematical Education. 8-15 July, 2012, Seoul, Korea. Con acceso el 04-06-2013 <http://yves.chevallard.free.fr/> .

CHEVALLARD, Y. (2013). Journal du Seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf>.

DUNN, J. W.; BARBANEL, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. American Journal of Physics. Vol. 68, Issue 8, 749. American Association of Physics Teachers.

FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. (1998). Física: Electromagnetismo y materia. Volumen 2. Reedición de Addison Wesley. (1998).

KÜMMERER B. (2002). The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study. En D. Holton. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. 321- 334. 560 páginas. <http://ebooks.kluweronline.com>

MORENO, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba, España, Universidad de Córdoba, 81-96.

OTERO, M. R.; FANARO, M. A.; CÓRICA, A. R.; LLANOS, V. C.; SUREDA, P.; PARRA, V. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Editorial Dunken.

SALINAS, P.; ALANÍS, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 12 [citado 2011-03-22]. Disponible en Internet: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004>

WILLCOX, K.; BOUNOVA, G. (2004). Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Copyright 2004. American Society for Engineering Education.

ZUÑIGA, S. L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea], Marzo. Vol 10. Nro. 1, 145-155: [fecha de consulta: 20 de marzo de 2011] Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33500107>.